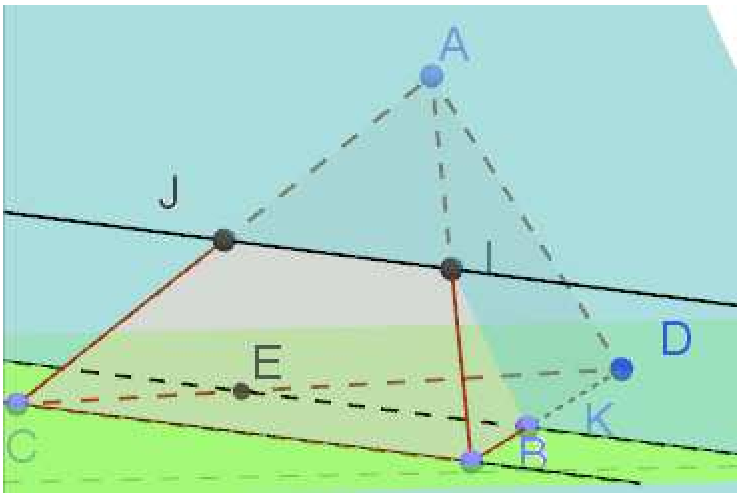
Correction du devoir surveillé n°3
7 janvier 2013

EXERCICE 1 **4 points**

Soit ABCD un tétraèdre.
Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$, $K \in [BD]$.
Déterminer et tracer l'intersection des plans (IJK) et (BCD).



1. Dans un premier temps nous devon démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC) : Les points I et J sont les milieu des segments $[AB]$ et $[AC]$. Donc le théorème des milieux, la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).
2. Les plans (IJK) et (BCK) sont sécants en K. Donc l'intersection de ces deux plans est une droite.
   Et (IJK) contient la droite (IJ) parallèle à la droite (BC) contenue dans le plan (BCK). Donc en appliquant le théorème du toit l'intersection des plan (IJK) et (BCK) est une droite parallèle à la droite (IJ) et à la droite (BC) passant par K.

EXERCICE 2 **3 points**

1. **a.** Donner la définition de la fonction carré.
   La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ (ou $f : x \longmapsto x^2$.

   b. Donner son tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

2. **a.** Donner la définition d'une fonction polynôme du second degré.
Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec a, b et c des réels et $a \neq 0$).

b. Comment s'appelle la courbe représentant une telle fonction.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

EXERCICE 3 **3 points**

Recopier et compléter les propositions suivantes :

1. Si $x \leqslant -3$, alors $x^2 \geqslant 9$
2. Si $x \geqslant 2\sqrt{3}$ alors $x^2 \geqslant 12$
3. Si $-3 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3}$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 12$
4. Si $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant \frac{1}{9}$

EXERCICE 4 **4 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

1. Équation et inéquation

a. Factoriser l'expression de f.
$f(x) = x \times x - 2x = x(x-2)$.

b. En déduire la (ou les) solution(s) de l'équation $f(x) = 0$.
L'équation est équivalente à : $x(x-2) = 0$, en utilisant le théorème du produit nul l'équation précédente est équivalente à $x = 0 \text{ou} x - 2 = 0$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 2$.
Donc l'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions de cet équation est $\mathbb{S} = \{0~;~2\}$.

c. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.
L'inéquation est équivalente à $x(x-2) < 0$. Pour résoudre cette inéquation, on fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc l'ensemble $\mathbb{S}$ des solutions de cette inéquation est $\mathbb{S} =]0~;~2[$

2. Extrémum en Variation

a. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction f.
Le premier coefficient $a = 1$ est positif donc la parabole est tourné vers le bas. Et la fonction admet un minimum.

b. Déterminer la valeur de x pour laquelle cette fonction admet un maximum ou un minimum.
Les coefficients du polynôme sont $a = 1, b = -2$ et $c = 0$.
Le minimum est atteint pour la valeur de $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\times1=1}$

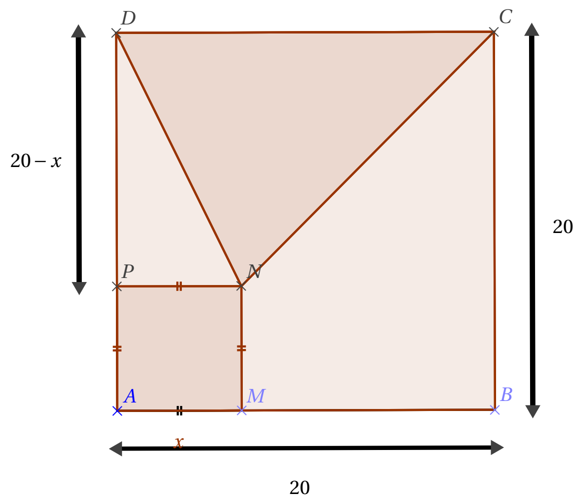
c. Résumer ces informations dans un tableau de variation.
Le minimum de la fonction f est : $f(1) = 1^2 - 2\times1 = 1-2 = -1$. On résume ces information dans un tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

EXERCICE 5 **6 points**

Soit $ABCD$ un carré de côté 20.

Soit M un point du segment $[AB]$. On note x la distance AM.
Les points P et N sont définis tels que $AMNP$ soit un carré et $P \in [AD]$.



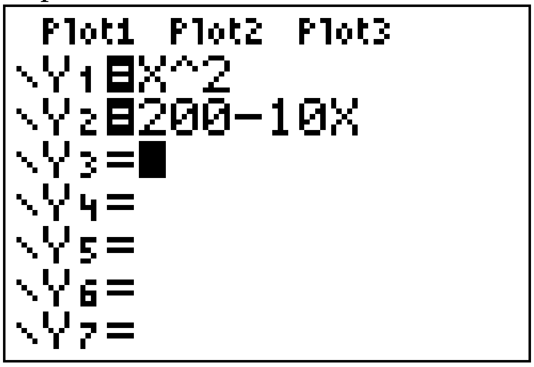
Soient $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ et $g(x)$ l'aire du triangle DNC.
Avant de commencer le problème, il faut remarquer que la variable x (longueur des côté du carré $AMNP$) est définie dans l'intervalle $[0\ ;\ 20]$.

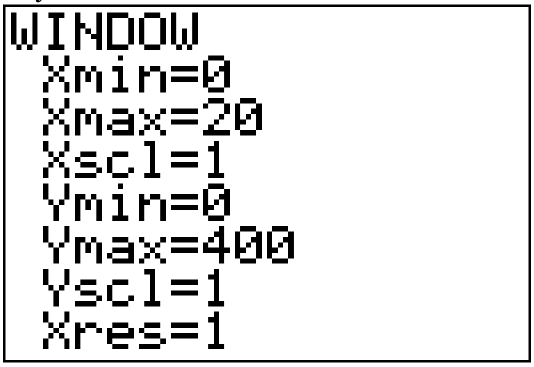
1. Mise en équation et Conjecture :

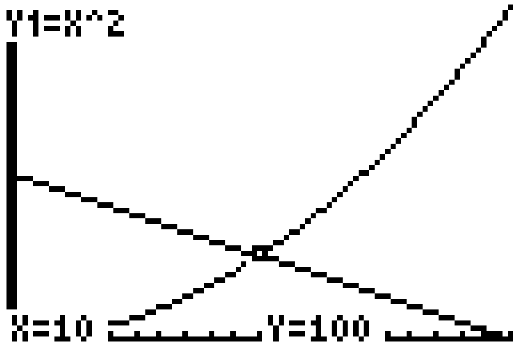
a. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
La fonction f est l'aire du carré $AMNP$ de côté x donc $f(x) = x^2$.

b. Exprimer $g(x)$ en fonction de x.
La fonction g est l'aire du triangle CDN de base $CD = 20$ et de hauteur $DP = 20 - x$.
Donc $g(x) = \frac{20(20-x)}{2} = \frac{20}{2}(20-x) = 10(20-x) = 200 - 10x$.

c. À L'aide de la calculatrice, représenter graphiquement les fonctions f et g, puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles le carré $AMNP$ et le triangle DNC ont la même aire.
En rentrant la fonction f dans $Y1$ et la fonction g dans $Y2$. On choisit pour fenêtre x dans l'intervalle [0 ; 20] et y dans l'intervalle [0 ; 400]







En déplaçant le curseur, on conjecture que l'intersection des deux fonctions (correspondant au moment ou l'aire du carré $AMNP$ et celle du triangle CDN sont les mêmes) est atteinte lorsque $x = 10$; à ce moment les aires ont pour valeurs : $\mathcal{A}(AMNP) = \mathcal{A}(CDN) = f(10) = g(10) = 100\text{cm}^2$

2. Démontrer.

a. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à $x^2 + 10x - 200 = 0$.
L'équation $f(x) = g(x)$ est successivement équivalente à :

$$x^2 = 200 - 10x$$

$$x^2 + 10x - 200 = 0.$$

b. Montrer que $x^2 + 10x - 200 = (x+20)(x-10)$.

$$(x+20)(x-10) = x^2 - 10x + 20x - 200 = x^2 + 10x - 200.$$

c. En déduire les solutions de $f(x) = g(x)$. D'après les questions précédentes l'équation $f(x) = g(x)$ est alors équivalente à

$$(x+20)(x-10) = 0$$

On résout cette équation en utilisant le théorème du produit null, pour obtenir :

$$x+20=0 \text{ ou } x-10=0$$

et on trouve pour solutions :

$$x=-20 \text{ ou } x=10.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de cette équation est : $\mathcal{S}=\{-20\ ;\ 10\}$.

3. Conclure pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du carré $AMNP$ est égale à l'aire du triangle DNC.
Les fonctions f et g étant définie pour x dans l'intervalle : $[0\ ;\ 20]$. La valeur de x pour laquelle l'aire du carré $AMNP$ est égale à l'aire du triangle DNC est $x=10$. Et les aires valent 100cm^2