Correction du contrôle de compétences

Le sujet comporte 3 exercices. La calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **6 points**

1. Donner la définition d'une fonction polynôme du second degré : une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.
   Avec a, b et c trois nombres réels connus et $a \neq 0$.
2. Compléter : Si $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$
3. Résoudre l'équation $(x-1)(x+2) = 0$.
   En utilisant le théorème du produit nul ($x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$). Donc les solutions de l'équation sont $x = 1$ et $x = -2$.
   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-2\ ;\ 1\}$

EXERCICE 2 **7 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,03x^2 - 6x + 57$ (Forme 1)
Un logiciel de calcul formel nous renvoie deux autres expressions de la fonction f :
(Forme 2) $f(x) = 0,03(x-190)(x-10)$
(Forme 3) $f(x) = 0,03(x-100)^2 - 243$
Pour chacune des questions suivantes choisir la forme la plus adapté pour y répondre et répondre à la question :

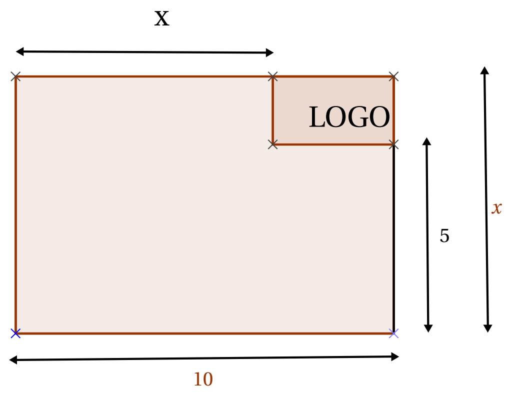
1. Résoudre $f(x) = 0$.
   Forme 2 (factorisée). On utilise le théorème du produit nul : les solutions de l'équation sont solution de $x - 190 = 0$ ou $x - 10 = 0$. Donc les solutions sont $x = 190$ ou $x = 10$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \{10\ ;\ 190\}$
2. Résoudre $f(x) \geqslant 0$. Forme 2. On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$		10		190		$+\infty$
$x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-190$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 10] \cup [190\ ;\ +\infty[$
3. Calculer $f(0)$. Forme 1(développée).
   $f(0) = 0,03 \times 0^2 - 6 \times 0 + 57 = 57$.
4. Calculer $f(100)$. Forme 3 (forme canonique).
   $f(100) = 0,03(100-100)^2 - 243 = 0,03 \times 0 - 243 = -243$

EXERCICE 3 **7 points**

Une imprimerie propose des cartes de visite rectangulaires avec une zone réservée au logo de l'entreprise. Les dimensions (en cm) sont variables pour s'adapter aux demandes des clients.



1. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   Sur la longueur de la carte de visite, on note que x ne peut pas être plus grand que 10cm. ($x \leqslant 10$)
   Et sur la largeur que x ne peut pas être plus petit que 5cm. ($x \geqslant 5$)
   Donc les valeurs possibles pour x sont dans l'intervalle $[5\,;\,10]$.
2. Exprimer l'aire $\mathcal{A}(x)$ de la zone réservée au logo en fonction de x.
   Le logo est dans un rectangle qui a pour longueur $10 - x$ et pour largeur $x - 5$.
   Donc on définie la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $[5\,;\,10]$ par :
   $$\mathcal{A}(x) = (10-x)(x-5) = 10x - 50 - x^2 + 5x = -x^2 + 15x - 50.$$
3. Étudier le sens de variation de la fonction $\mathcal{A}$.
   La fonction $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré et admet pour coefficient : $a = -1, b = 15$ et $c = -50$. Son premier coefficient $a = -1$ est négatif. Donc le parabole représentant cette fonction est tournée vers le haut. Elle d'abord croissante et ensuite décroissante. Elle admet un maximum pour : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{15}{2\times(-1)} = \frac{15}{2} = 7,5$.

x	5		7.5		10
$f(x)$	0	$\nearrow$	22.5	$\searrow$	0

$f(5) = -5^2 + 15 \times 5 - 50 = -25 + 75 - 50 = 0$
$f(7,5) = -(7,5)^2 + 15 \times 7,5 - 50 = 56.25 - 112.5 - 50 = 6,25$ $f(10) = -10^2 + 15 \times 10 - 50 = -100 + 150 - 50 = 0$

4. **Quelles sont les dimensions de la carte telle que la zone réservée au logo soit la plus grande possible ? La plus petite possible ?**
   L'aire de la zone réservée au logo est maximale lorsque $x = 7,5$. La carte a alors pour dimensions : 10cm le longueur sur 7,5cm de largeur. La zone réservée pour le logo a pour aire : $\mathcal{A}(7,5) = 22,5cm^2$.
   La surface réservé au logo est minimale lorsque $x = 5$ (les dimensions de la carte seront de 10×5) ou $x = 10$ (les dimensions de la cartes seront de 10×10). Dans ces deux cas, les cartes ne comporterons pas de logo, car la surface laissée pour le logo est de $\mathcal{A}(5) = \mathcal{A}(10) = 0\text{cm}^2$.