Dans la figure ci-contre :

- ABCD est un carré ;
- ECGF est un rectangle ;
- Les points B, C, G, N sont alignés ;
- Les points E, D, C, M sont alignés ;
- $DC = DE = EF = CM = GN$.
- I est le milieu du segment $[MN]$

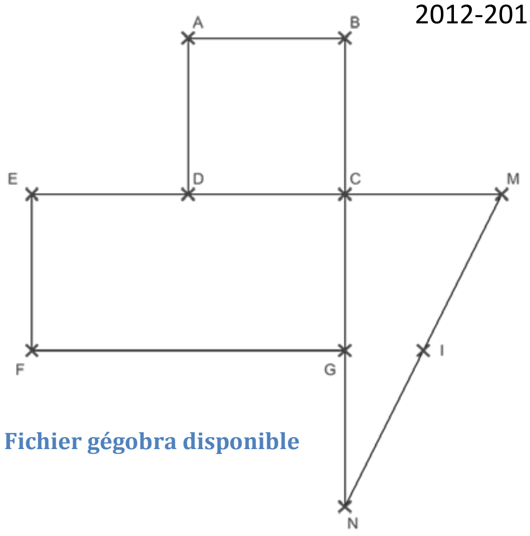

Figure 1 Fichier gégobra disponible

Les droites (AM) et (EI) sont-elles parallèles ?

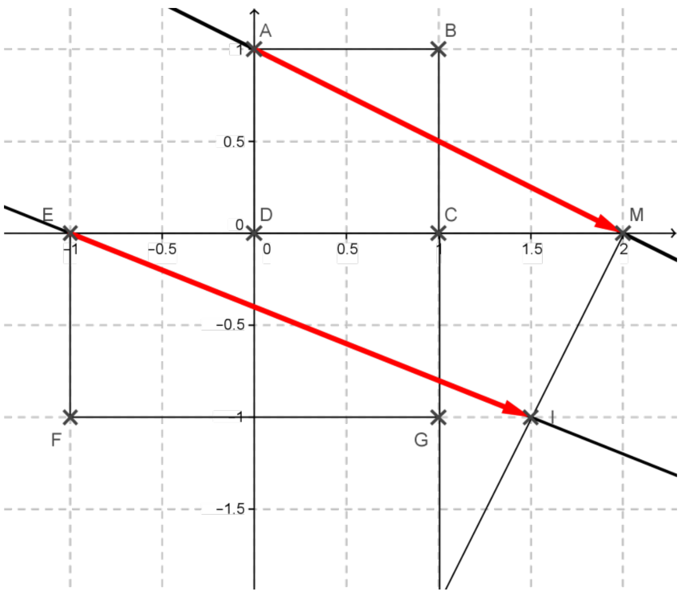

Figure 2 fichier géogébra disponible

On pourra se placer dans le repère (D, C, A).

Savoir si les droites (AM) et (EI) sont parallèles revient à savoir si les vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires.

Propriété : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

En se plaçant dans le repère indiqué, on détemrine les coordonnées des points :

$A(0\,;\,1)$
$E(-1\,;0)$
$M(2\,;0)$
$N(1\,;\,-2)$.

On calcul les coordonnées du point I milieu de $[MN]$:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{0+(-2)}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point $I(1{,}5\,;\,-1)$.

On calcul ensuite les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$:

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix} x_I - x_E \\ y_I - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5-(-1) \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'après la propriété, les vecteur $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont colinéaires si et seulement si

$$x_{\overrightarrow{AM}} \times y_{\overrightarrow{EI}} = y_{\overrightarrow{AM}} \times x_{\overrightarrow{EI}}$$
$$2 \times (-1) = -1 \times 2{,}5$$
$$-2 = -2{,}5.$$

Ce qui est toujours faux donc les droites (AM) et (EI) ne sont pas parallèles car vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{EI}$ ne sont pas colinéaires.☑