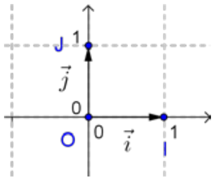
I. Repère

Définition : On appelle repère orthonormé $(O\,,I\,,J)$ lorsque le triangle OIJ est isocèle rectangle en O.



On dira aussi que le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé.

II. Généralités

a. Coordonnées du milieu de deux points.

Propriété : Soient A et B deux point de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Le milieu I du segment $[AB]$ admet pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

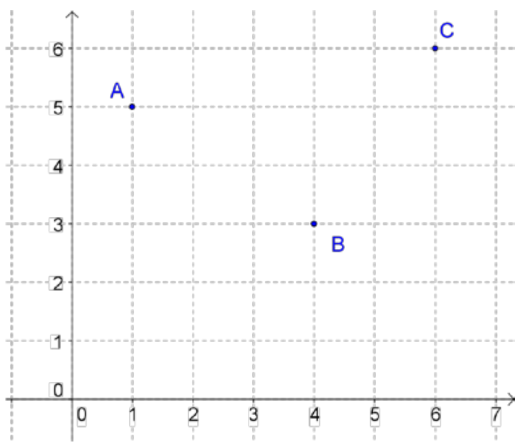
Exercice : Faire un algorithme. (TI) (Casio)

Lire x_A Lire y_A Lire x_B Lire y_B	Entrées
x_I prend la valeur $\frac{x_A+y_A}{2}$ y_I prend la valeur $\frac{y_A+y_B}{2}$	Traitements
Renvoyer x_I Renvoyer y_I	Sorties

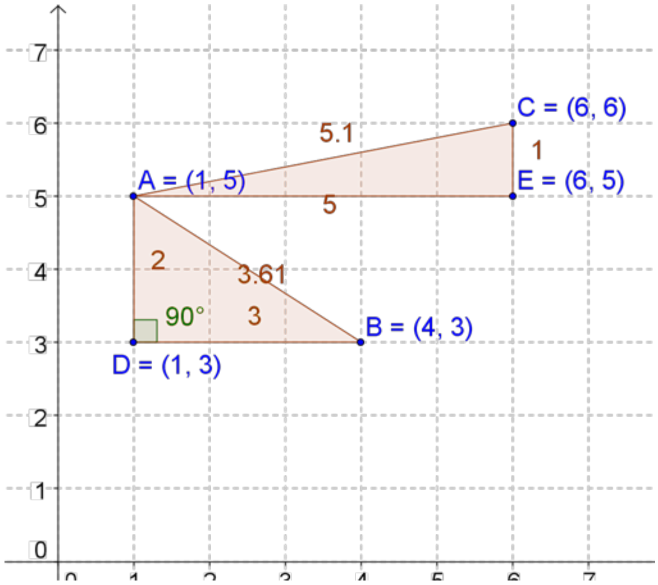
Exercices d'applications : 1 – 2 p 189

b. Distance entre deux points (dans un repère orthonormé).

Activité : Déterminer la distance AB et la distance AC.



Pour ce faire on trace des triangles rectangles afin d'utiliser le théorème de Pythagore :



Pour la distance AB, en appliquant le théorème de Pythagore : $AB^2 = AD^2 + DB^2$

$AB^2 = 2^2 + 3^2$

$AB^2 = 13$

$AB = \sqrt{13} \simeq 3{,}61.$

De la même façon pour AC on trouve :

$AC = \sqrt{26} \simeq 5{,}1.$☑

En généralisant la méthode, on déduit la formule :

Propriété : **Dans un repère orthonormé**, soient A et B de coordonnées $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, la distance AB est donnée par la formule :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$\|\overrightarrow{AB}\|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice : Déterminer la distance AB lorsque : $A(-1\,;5)$ et $B(4\,;\,-3)$

$$AB = \sqrt{(4-(-1))^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} \simeq 9{,}4..☑$$

Exercice : Faire un algorithme.

Lire x_A Lire y_A Lire x_B Lire y_B	Entrées
AB prend la valeur $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	Traitement
Renvoyer AB	Sortie

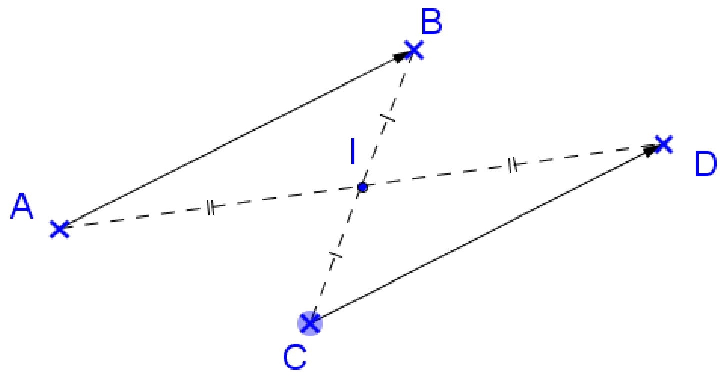
Exercices d'applications : 6 - 7 - 8 p 190

III. Vecteurs

a. Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Définition : Soient A et B deux points du plan. À tout point C du plan on associe l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ aient le même milieu.

On dit que D est l'image de C par la translation qui à A associe B.
D est l'unique point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

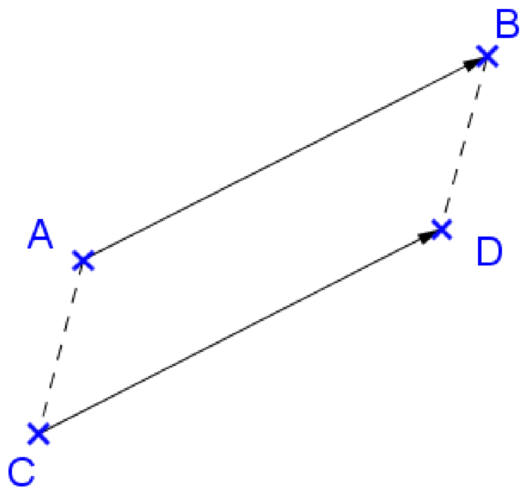


La translation qui à A associe B est appelé translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur est définie de manière unique par une idée de déplacement :

- La direction celle de la droite (AB).
- Le sens de A vers B.
- Et la longueur AB (appelé norme).

b. Egalité de vecteur

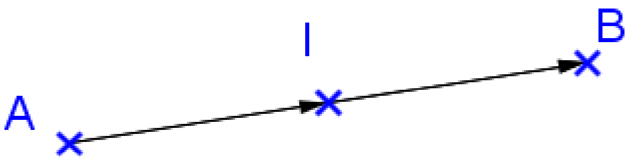


Définition : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points distinct du plan.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Propriété : Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}.$$

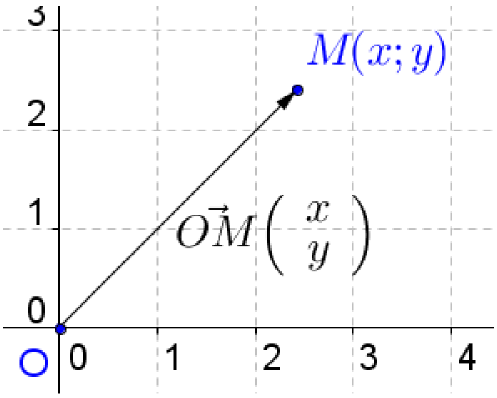


Définition : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est nul lorsque les points A et B sont confondus. On note $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

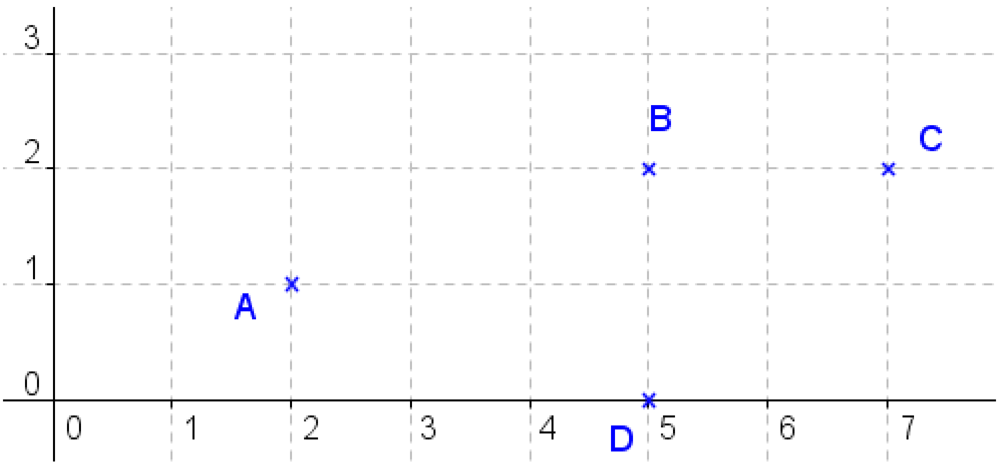
c. Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Définition : Dans un repère les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. :

si $M(x\,;y)$ on note $\binom{x}{y}$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

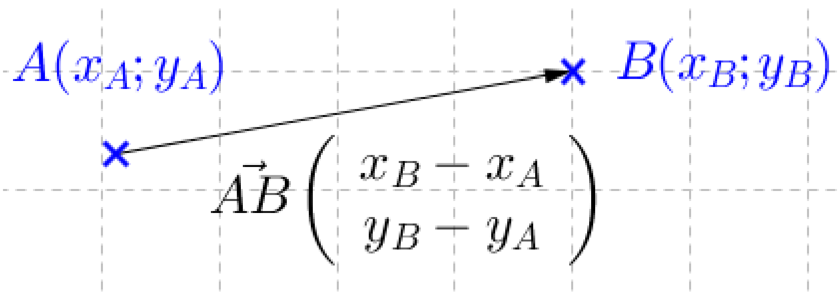


Activité : Reproduire la figure. Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{DB}$.



Propriété : Dans un repère, soient deux points A et B de coordonnées $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

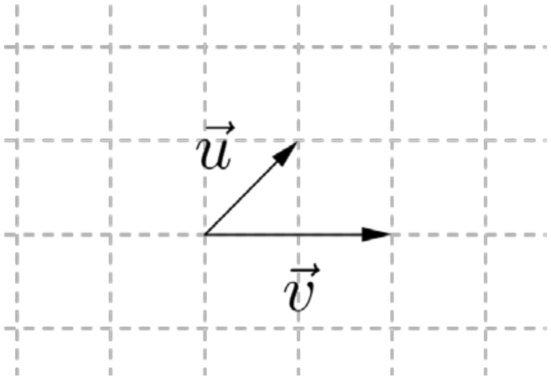
$$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}.$$



Exercice : faire un algorithme qui pour deux points donnés renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Pour mardi 5 février (G2) jeudi 7 février (G1).
n°1- 2 p231 et n°5 – 6 -7 p232.

d. Somme de deux vecteurs

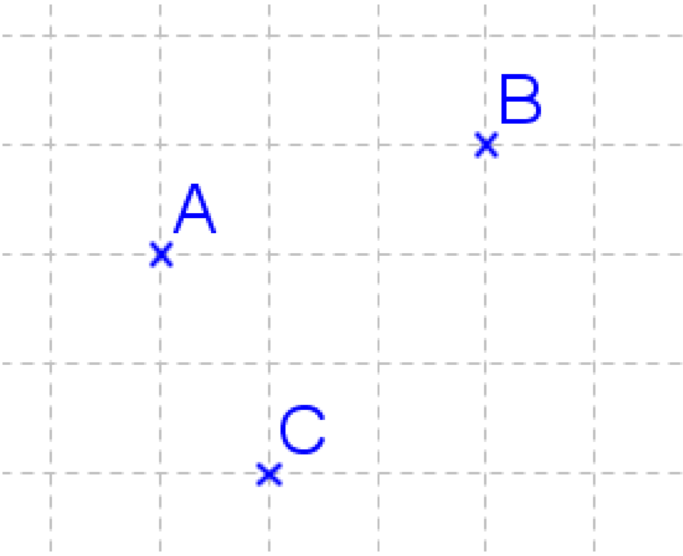


⚐ Activité :

1. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Reproduire la figure et tracer les vecteurs suivants :

1. $-\vec{u}$
2. $2\vec{v}$
3. $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

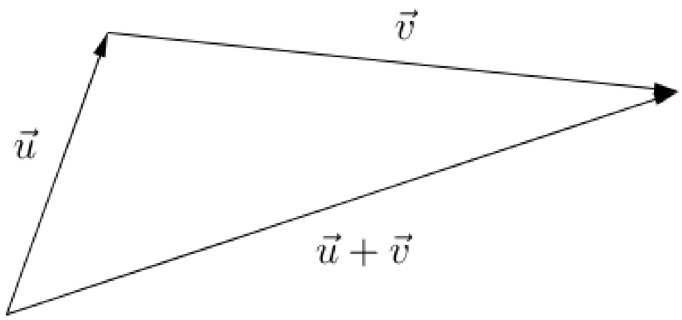


2. Soit trois points A, B et C. Reproduire la figure suivante et tracer le vecteur suivant :

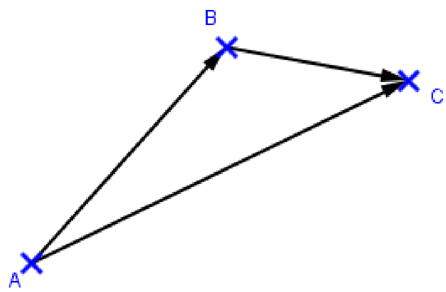
$$2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}.$$

3. Sur un second graphique tracer le point M défini par :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}.$$



Propriété définition: En enchaînant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient un nouvelle translation de vecteur la somme de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ et noté $\vec{u} + \vec{v}$.



Relation de Chasles : Pour tout points du plan A, B, C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ alors :

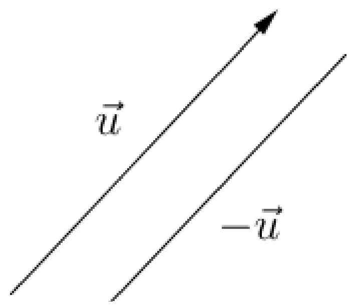
$$\vec{u} + \vec{v}\binom{x + x'}{y + y'}.$$

Exercice : Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ dans chaque cas :

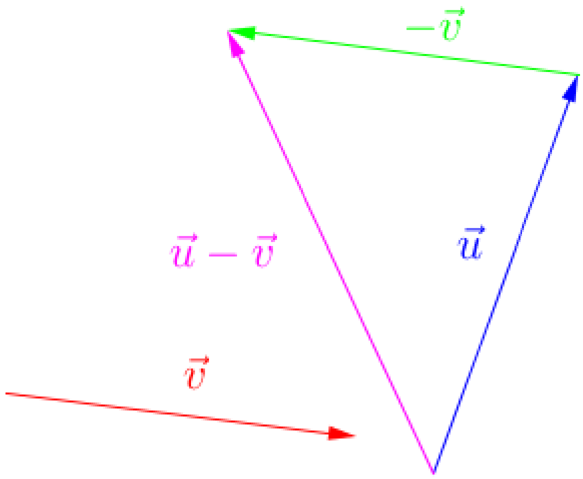
1. $\vec{u}\binom{1}{3}, \vec{v}\binom{-2}{1}$; $\vec{u}+\vec{v}=\binom{1-2}{3+1}=\binom{-1}{4}$
2. $\vec{u}\binom{-1}{0}, \vec{v}\binom{-2}{-5}$; $\vec{u}+\vec{v}=\binom{-1-2}{0-5}=\binom{-3}{-5}$
3. $\vec{u}\binom{5}{3}, \vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}5+\frac{1}{2}\\ 3+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{9}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{2}\\ \frac{11}{3}\end{pmatrix}$

e. Opposé d'un vecteur, différence de deux vecteurs

Définition : Deux vecteurs sont opposés lorsqu'ils ont mêmes direction, même norme et sont de sens contraire.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.



Définition : Le vecteur $\vec{u}-\vec{v}$ est définie par $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.



Propriété : Dans un repère du plan, si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ alors :

$$\vec{u}-\vec{v}\binom{x-x'}{y-y'}.$$

Exercice : Soient trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées : $\vec{u}\binom{7}{2}, \vec{v}\binom{-2}{-1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ -6\end{pmatrix}$

Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $\vec{u}+\vec{v}=\binom{7-2}{2-1}=\binom{5}{1}$
2. $\vec{u}-\vec{v}=\binom{7-(-2)}{2-(-1)}=\binom{9}{3}$
3. $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}7-2-\frac{1}{2}\\ 2-1-6\end{pmatrix}=\binom{4.5}{-5}$.

f. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel. Si $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans un repère, le vecteur de notée $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\binom{kx}{ky}$ dans le même repère.

Remarques :
Le vecteur $k\vec{u}$ à la même direction que le vecteur $\vec{u}$.
Si $k > 0$, il a le même sens que le vecteur $\vec{u}$.
Si $k < 0$, il est de sens opposé au vecteur $\vec{u}$.
La longueur du vecteur $k\vec{u}$ est $|k| \times$ la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Exercice : soient les trois vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées $\vec{u}\binom{7}{2}, \vec{v}\binom{-3}{1}$ et $\vec{w}\binom{-2}{-5}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :

1. $2\vec{u} - 3\vec{v}$.
2. $7\vec{v} + 2\vec{w}$
3. $2\vec{u} + 3\vec{v} - 7\vec{w}$

Propriété : Si k et k' sont deux nombres réels et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors :

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$
$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$
$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}.$$

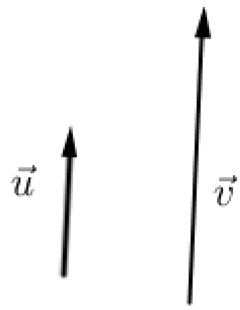
IV. Colinéarité de deux Vecteurs

a. Définition et propriétés

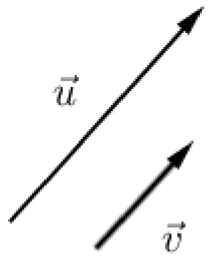
Définition : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel.

C'est-à-dire : soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, ils sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Exercice : Dans chaque cas déterminer k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$:

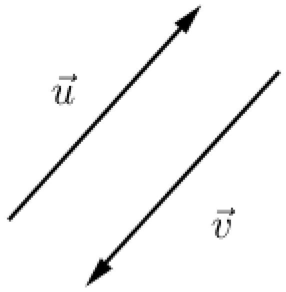


1. $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$



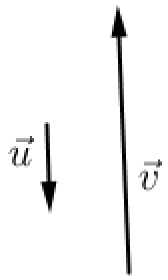
2. $\vec{u} = 2\vec{v}$

3.



$\vec{u} = -\vec{v}$

4.



$\vec{u} = -\frac{1}{3}\vec{v}$

Propriété : Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires :

1. Si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
2. Si et seulement si $xy' = x'y$.

x	x'
y	y'

Exercice : Faire un algorithme testant si deux vecteurs sont colinéaire.

Exercice : Dans chaque cas dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

1. $\vec{u}\binom{2}{1}, \vec{v}\binom{-4}{-2}$ $\quad$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$$2 \times (-2) = 1 \times (-4)$$
$$-4 = -4 \quad \text{Toujours vrai}$$

Autre explication : $-2\vec{u} = \vec{v}$.

2. $\vec{u}\binom{5}{-3}, \vec{v}\binom{-2.5}{1.5}$ $\quad$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$$5 \times 1{,}5 = -3 \times (-2{,}5)$$
$$7{,}5 = 7{,}5 \quad \text{Toujours vrai}$$

Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

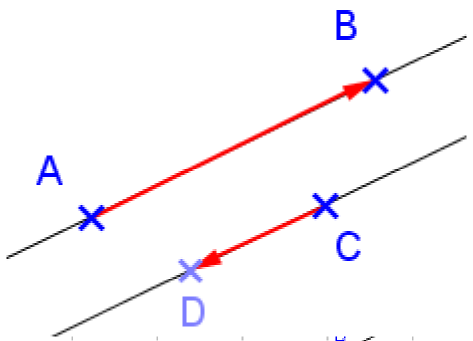
3. $\vec{u}\binom{-1}{2}, \vec{v}\binom{-2}{1}$. $\quad$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi

$$-1 \times 1 = 2 \times (-2)$$
$$-1 = -4 \quad \text{FAUX}$$

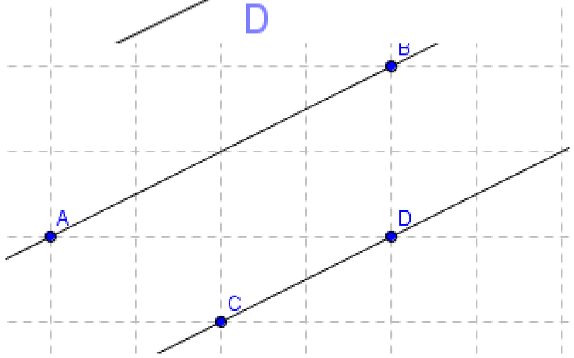
Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b. Application à la géométrie

Propriété : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

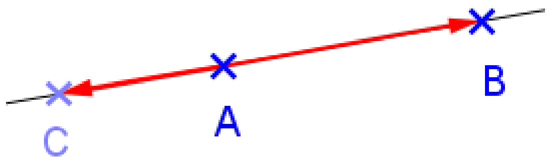


Exercice : Les droites (AB) et (CD) sont-elle parallèles ?



$$\overrightarrow{AB} = \binom{4}{2} \qquad \overrightarrow{CD} = \binom{2}{1} \qquad \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$$

Propriété : Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Remarque : on utilisera la propriété précédente sous la forme :

Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.