Retour vers le futur :

Dans le film, la machine à voyager dans le temps doit atteindre la vitesse de 90 $miles/h$.
Sur un compteur de voiture on constate que 80 km/h correspondent à 50 $miles/h$.

1. Calculer en km/h la vitesse que doit atteindre la machine à voyager dans le temps.
2. Afin de réaliser une application de conversion pour un téléphone portable, on souhaite programmer une fonction qui à toute vitesse x en $miles/h$ renvoie la vitesse correspondante en km/h.
a. Donner l'expression de cette fonction.
b. Quelle est la nature ?
3. Quelle est l'expression de la fonction réciproque : qui à toute vitesse x en km/h renvoie la vitesse correspondante en $miles/h$.
4. Tracer ces fonctions à l'aide la calculatrice.

Résolution de l'exercice :

1.

50	90
80	?

Ici on a une relation de proportionnalité car à la vitesse nulle de 0 km/h correspond la vitesse de 0 $miles/h$.
En calculant la quatrième proportionnelle on obtient :

$$90 \times \frac{80}{50} = 144\ km/h.$$

Donc à une vitesse de 90 $miles/h$ correspondent 144 km/h.

2.

x (en $miles/h$)	50	90	x
$f(x)$ (en km/h)	80	144	1,6 x

a. De manière générale à tout réel x positif, exprimé en $miles/h$, on obtient l'image de la fonction f exprimé en km/h : $f(x) = \frac{80}{50}x = 1{,}6x$.
L'équation de la droite est : $y = 1{,}6\ x$.

b. La fonction f est une fonction affine (de la forme $f(x) = ax$), de coefficient directeur $a = 1{,}6$.

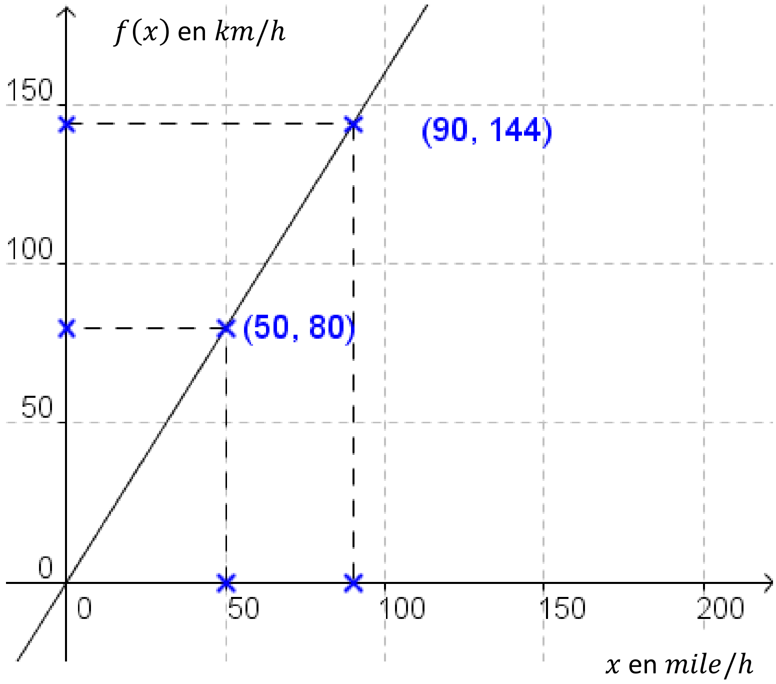
3.

x (en km/h)	80	144	x
$f(x)$ (en $miles/h$)	50	90	0,625 x

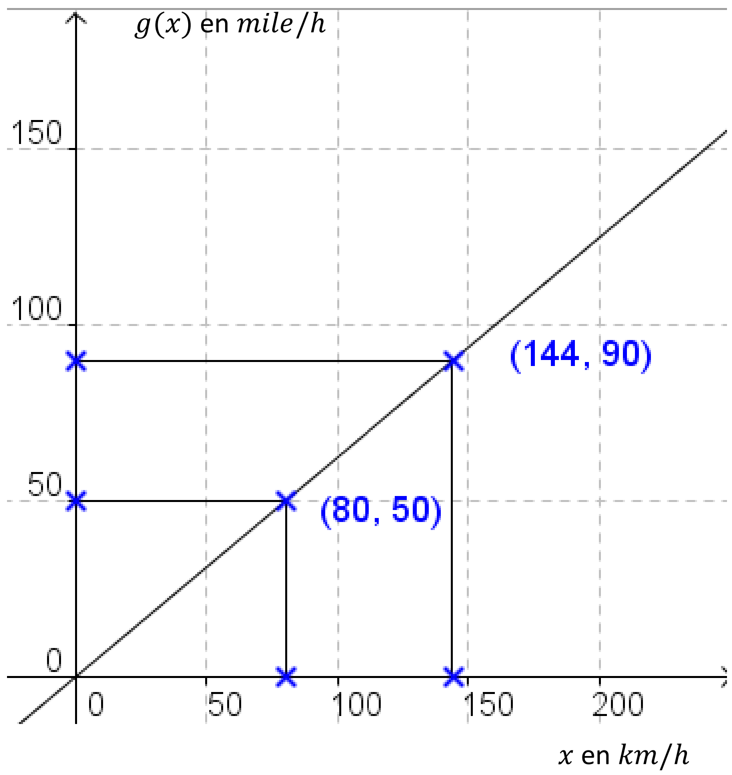
De la même manière on peut associé à tout réel x positif, exprimé en km/h, l'image de la fonction g exprimé en $miles/h$: $g(x) = \frac{50}{80}x = 0{,}625x$.
D'une autre façon, en utilisant l'équation de la droite précédente on aurait pu exprimer x en km/h en fonction de y en $miles/h$:

$$y = 1{,}6\,x \Leftrightarrow \frac{y}{1{,}6} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{1{,}6}y \Leftrightarrow x = 0{,}625y.$$

4. Représentation graphique de la fonction f :

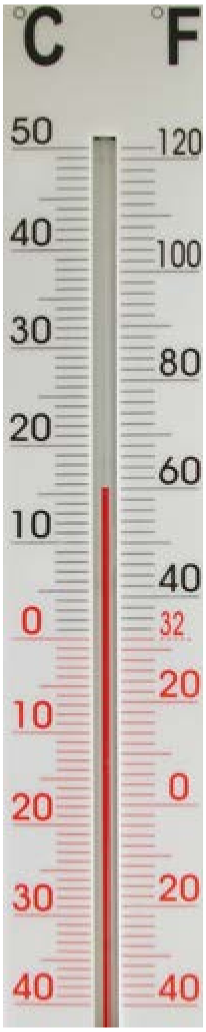


Représentation graphique de la fonction g :



<u>Une affaire de température</u> :

De la même manière que l'exercice précédent, on souhaite convertir les températures exprimés en degrés Fahrenheit en degrés Celsius.



Ici nous ne sommes pas dans une relation de proportionnalité : car d'après la représentation du thermomètre, on constate qu'à une température de $0°C$ correspond une température de $32°F$ (et non pas une température de $0°F$). Nous ne pouvons donc pas utiliser la méthode de la 4ème proportionnelle.

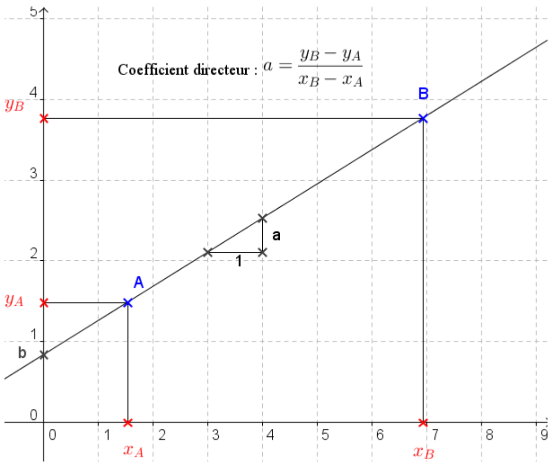
Relevons quelques données correspondantes :

Température en °C	0	10	20	-40
Température en °F	32	50	64	-40

On choisit de modéliser ce problème par une fonction affine.

Elément de cours : Une fonction affine est de la forme $f(x) = ax + b$.

a est le coefficient directeur.
b est l'ordonnée à l'origine.



Pour calculer le coefficient directeur a en connaissant deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$, on utilise la formule :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Afin de ramener les variations observées entre les points A et B distant de $x_B - x_A$ à une distance de 1 sur l'axe des antécédents x.

Dans un premier temps on remarque que la fonction admet comme ordonnée à l'origine $b = 32$, car nous avons constaté que l'image de 0 est 32.

Dans un second temps, utilisons la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ aux points $A(0\,;36)$ et $B(10\,;50)$.

Le coefficient directeur de la fonction affine est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{50-36}{10-0} = \frac{14}{10} = 1{,}4$.

Donc pour tout nombre réel x exprimé en $°F$ la fonction f permettant d'obtenir comme image la température correspondante en $°C$ admet pour équation : $f(x) = 1{,}4\,x + 32$.

L'équation de la droite s'écrit également : pour toute température x exprimé en $°F$ et toute température y exprimé en $°C$ on a la relation $y = 1{,}4\,x + 32$.

Pour obtenir la fonction qui exprime pour toute température en $°C$ la température en $°F$ il faut exprimer ici x en fonction de y :

$$y = 1{,}4\,x + 32 \Leftrightarrow y - 32 = 1{,}4\,x \Leftrightarrow \frac{y - 32}{1{,}4} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{1{,}4}y - \frac{32}{1{,}4} \Leftrightarrow x \simeq 0{,}71y - 22{,}86.$$

Donc la fonction g qui à toute température x exprimée en $°C$ associe la température $g(x)$ en $°F$ admet pour expression algébrique : $g(x) = 0{,}71x - 22{,}86$.