Devoir surveillé 3
23 janvier 2013

EXERCICE 1 **4 points**

Le serpent

Dans cette exercice toute trace d'étude ou de recherche même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans un lac, un nénuphar mesure $\frac{1}{100}$ de la taille du lac. Chaque jour, sa taille double. Dans combien de jours le lac sera trop petit pour héberger le nénuphar ?

Exercice 2 **4 points**

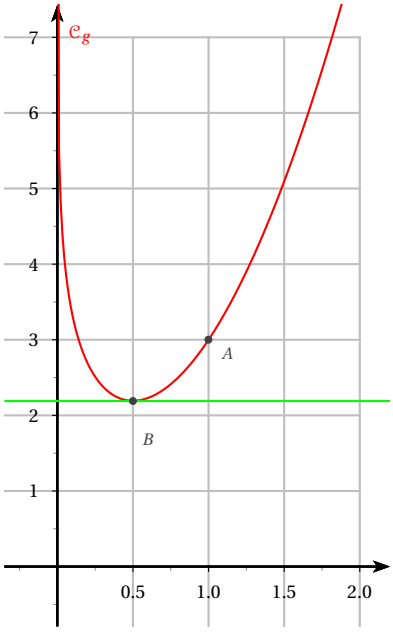
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation est inéquation suivantes :
   a. $e^{x+1} = e^{2x-3}$
   b. $e^{x+1} > 12$.
2. Sans justification répondre aux questions suivantes :
   a. Donner la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = e^{x^2+1} + x^2.$$
   b. Donner une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = 2e^{3x+1}.$$
   c. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
   $$h(x) = e^{x+1} + \frac{1}{x^2}.$$
   Déterminer les limites suivantes :
   i. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$
   ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$
   iii. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

Exercice 3 **4 points**

1. Résoudre l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$
2. On souhaite résoudre l'équation (E) : $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$. Pour cela on pose $X = e^x$.
   a. Vérifier que l'équation (E) s'écrit sous la forme (E') : $aX^2 + bX + c = 0$, où a, b et c sont trois réels qu'on précisera.
   b. Résoudre alors l'équation (E').
   c. Résoudre les équations $e^x = 1$ et $e^x = -\frac{1}{2}$.
   d. en déduire les solutions de l'équation (E).

Problème **8 points**

Partie A : La courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Cette courbe passe par le point $A(1\ ;\ 3)$ et sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est parallèles à l'axe des abscisses.



1. **a.** À partir des informations sur $\mathcal{C}_g$, donner les valeurs de $g(1)$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.
   b. Par lecture graphique, faire une conjecture sur le signe de $g(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. On admet que la fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = a + b\ \ln(x) + 2x^2$.
   En utilisant les résultat de **1.a.**, déterminer a et b.
   Dans la suite, on admet que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 1 - \ln(x) + 2x^2$.
3. **a.** Calculer $g'(x)$, puis étudier son signe pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Dresser les tableau de variation de g (on ne demande pas les limites aux bornes de l'intervalle de définition).
   c. Justifier alors la conjecture émise à la question **1.b.**

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\ x}{x} + 2x.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphique 5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition. En donner une interprétation graphique s'il y a lieu.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
3. **a.** À l'aide de vos résultats de la **Partie A** ? en déduire le signe de $f'(x)$ pour x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
4. **a.** Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.
   b. Construire la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisses 1, puis construire $\mathcal{C}_f$.