Correction devoir surveillé 3
23 janvier 2013

EXERCICE 1 **4 points**

Le nénuphar

Dans cette exercice toute trace d'étude ou de recherche même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans un lac, un nénuphar mesure $\frac{1}{100}$ de la taille du lac. Chaque jour, sa taille double. Dans combien de jours le lac sera trop petit pour héberger le nénuphar ?

On modélise la situation par une suite géométrique (u_n) de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{100}$.

$$u_n = \frac{2^n}{100}.$$

Pour résoudre notre problème on cherche les solutions de l'inéquation : $u_n \geqslant 1$, qui est successivement équivalente à :

$\dfrac{2^n}{100} \geqslant 1$

$2^n \geqslant 100$

$\ln(2^n) \geqslant \ln(100)$

$n\ln(2) \geqslant \ln(100)$

$n \geqslant \dfrac{\ln(100)}{\ln(2)} \simeq 6.64.$

Donc entre le sixième et le septième jours, le lac sera trop petit pour le nénuphar.

Exercice 2 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équation est inéquation suivantes :
   a. $\mathrm{e}^{x+1} = \mathrm{e}^{2x-3}$
   Cette équation est successivement équivalente à :
   $x + 1 = 2x - 3$
   $4 = x$
   b. $\mathrm{e}^{x+1} > 12.$
   Cette inéquation est successivement équivalente à :
   $\ln\left(\mathrm{e}^{x+1}\right) > \ln(12)$
   $x + 1 > \ln(12)$
   $x > \ln(12) - 1.$
   L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est $\mathcal{S} =]\ln(12) - 1\ ;\ +\infty[$
2. Sans justification répondre aux questions suivantes :
   a. Donner la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1} + x^2.$$
   La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1} + 2x.$$
   b. Donner une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = 2\mathrm{e}^{3x+1}.$$
   Une primitive G de la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$G(x) = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{3x+1}.$$

c. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \mathrm{e}^{x+1} + \frac{1}{x^2}.$$

Déterminer les limites suivantes :

i. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

iii. $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$

Exercice 3 **4 points**

1. Résoudre l'équation $2X^2 - X - 1 = 0$.
On calcul de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$.
Les solutions de cette équation sont alors données par :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{4} = 1.$$

2. On souhaite résoudre l'équation (E) : $2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 1 = 0$. Pour cela on pose $X = \mathrm{e}^x$.

a. Vérifier que l'équation (E) s'écrit sous la forme (E') : $aX^2 + bX + c = 0$, où a, b et c sont trois réels qu'on précisera.
L'équation (E) s'écrit : $2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 - \mathrm{e}^x - 1 = 0$, en ayant posé $X = \mathrm{e}^x$ on déduit qu'elle est équivalente à $2X^2 - X - 1 = 0$. D'où sous la forme (E') : $aX^2 + bX + c = 0$, avec $a = 2$, $b = -1$ et $c = -1$.

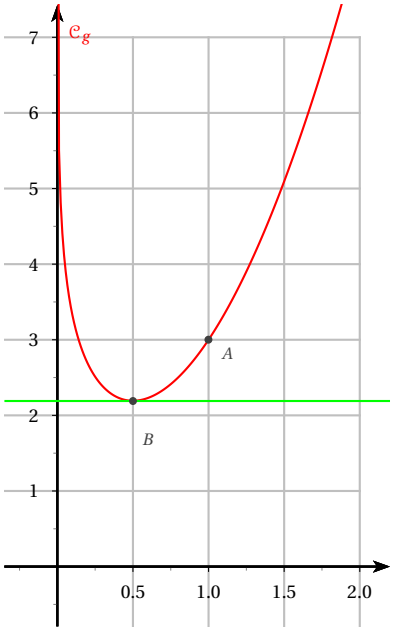
b. Résoudre alors l'équation (E').
Équation résolue à la question **1.**

c. Résoudre les équations $\mathrm{e}^x = 1$ et $\mathrm{e}^x = -\frac{1}{2}$.
$\mathrm{e}^x = 1$ est équivalente à $x = \ln(1)$ c'est-à-dire $x = 0$.
$\mathrm{e}^x = -\frac{1}{2}$ n'admet pas de solutions car une exponentielle est toujours strictement positive.

d. en déduire les solutions de l'équation (E).
On déduit que la solution de l'équation (E) est $x = 0$.

Problème **8 points**

Partie A : La courbe $\mathcal{C}_g$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Cette courbe passe par le point $A(1\ ;\ 3)$ et sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est parallèles à l'axe des abscisses.



1. **a.** À partir des informations sur $\mathcal{C}_g$, donner les valeurs de $g(1)$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)$.
   $g(1) = 3$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

   b. Par lecture graphique, faire une conjecture sur le signe de $g(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Graphiquement, on conjecture que pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

2. On admet que la fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = a + b\ \ln(x) + 2x^2$.
   En utilisant les résultats de **1.a.**, déterminer a et b.
   $g'(x) = \frac{b}{x} + 2 \times 2x = \frac{b}{x} + 4x$.

$$g(1) = 3$$
$$\Leftrightarrow a + b\ \ln(1) + 2 \times 1^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow a + b \times 0 = 1$$
$$\Leftrightarrow a = 1$$
$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{\frac{1}{2}} + 4 \times \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2b + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2b = -2$$
$$\Leftrightarrow b = -1$$

Dans la suite, on vient de démontrer, que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 1 - \ln(x) + 2x^2$.

3. **a.** Calculer $g'(x)$, puis étudier son signe pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x} + 4x = \frac{-1+4x^2}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

Le signe de la dérivée g' est négatif sur $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et positif sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

b. Dresser les tableau de variation de g (on ne demande pas les limites aux bornes de l'intervalle de définition).

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2}+\ln(2)$	↗	

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \ln(2) + \frac{2}{4} = \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$

c. Justifier alors la conjecture émise à la question **1.b.**.
D'après le tableau de variation, on constante que le minimum de cette fonction est atteint lorsque $x = \frac{1}{2}$ et est strictement positif $\left(g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln(2)\right)$

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln\,x}{x} + 2x.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités graphique 5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition. En donner une interprétation graphique s'il y a lieu.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
Donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} + 2 = \frac{1-\ln(x)}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1-\ln(x)+2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

3. **a.** À l'aide de vos résultats de la **Partie A** ? en déduire le signe de $f'(x)$ pour x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Dans la **Partie A**, on démontrer que pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)$ est toujours positive.
De plus, $x \longmapsto x^2$ est également positive. Donc la dérivée f' de la fonction f est positive pour tout x dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4. **a.** Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

$f(1) = \dfrac{\ln(1)}{1} + 2 \times 1 = 2.$

$f'(1) = \dfrac{g(1)}{1^2} = 3.$

b. Construire la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisses 1, puis construire $\mathcal{C}_f$.