A. Un peu d'intuition, un peu de simulation

Trois personnes choisissent chacune au hasard et indépendamment l'une de l'autre un nombre réel compris entre 0 et 1. On appelle I_1, I_2 et I_3 les nombres choisis respectivement par les personnes 1, 2 et 3. On s'intéresse alors à $L = I_1 + I_2 + I_3$.

1. a) Quel loi de probabilité suit les nombres I_1, I_2 et I_3.
   b) Dans quel intervalle varie L ?
   c) Le choix du nombre L ce fait-elle de manière uniforme sur $[0\,;3]$?
2. a) Quelle algorithme permet de simuler l'expérience aléatoire considéré ?
   b) Utiliser l'algorithme 15 fois de suite en notant à chaque fois si le résultat est entre 0 et 1, entre 1 et 2 ou entre 2 et 3 :

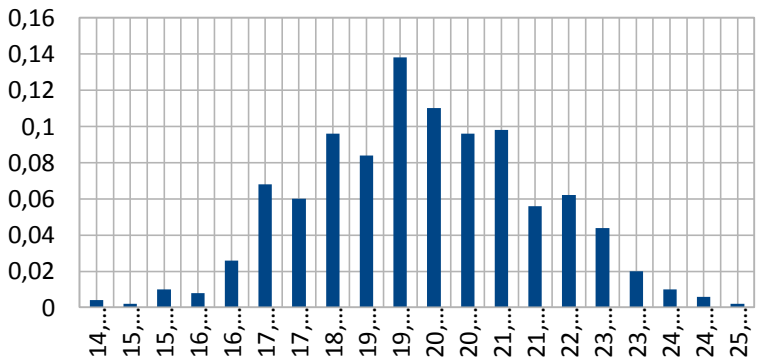
Résultat	Entre 0 et 1	Entre 1 et 2	Entre 2 et 3
Nombres d'apparitions			

3. Au regard des résultats de la classe. Formuler une nouvelle réponse à la question 1.c).

B. Et avec 40 valeurs ?

On considère maintenant 40 segments numérotés de 1 à 40. Les segments ont tous une longueur choisie dans le même intervalle $[0\,;1]$. On choisit la longueur l_i du segment i, indépendamment des longueurs des autres segments, au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$. On met ces 40 segments les uns au bout des autres et on s'intéresse à la longueur totale L ainsi obtenue.

1. Dans quel intervalle varie L ?
2. On a simulé 500 fois sur un tableur l'obtention de L, somme de 40 nombres choisis au hasard dans l'intervalle $[0\,;1]$. Les valeurs de L obtenues ont été rassemblées en 20 classes de même largeur.



On donne ci-contre un diagramme des fréquences : les valeurs en abscisses sont les centres des classes.

Répondre par lecture graphique aux questions suivantes :

a) En quoi l'observation de ce diagramme permet de conjecturer que L ne suit pas une loi uniforme sur $[0\,;40]$?

Pour cette simulation, on obtient, pour la série de valeurs de L, la moyenne $m = 19{,}93$ et l'écart-type $s = 1{,}84$.

b) évaluer la fréquence de l'évènement : « L est inferieur ou égal à m ». Que peut-on dire de la répartition des valeurs de L autour de la moyenne ?

c) Evaluer la fréquence de l'évènement : « L est compris entre $m - s$ et $m + s$ »

d) Evaluer la fréquence de l'évènement : « L est compris entre $m - 2$ et $m + 2s$ ».

La loi de L est proche

I. Loi normale

a. Loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$

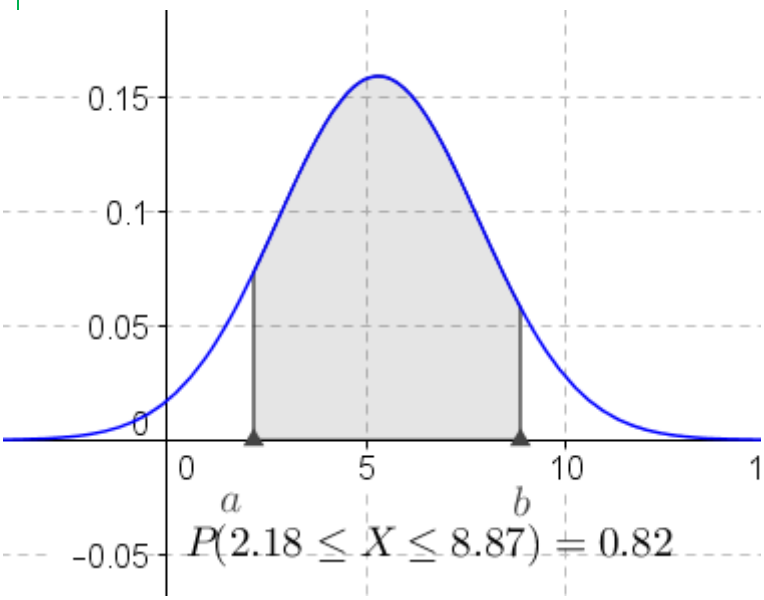
Définition : Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.
Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ si, pour tout intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$, la probabilité de l'évènement « $X \in I$ » est l'aire du domaine $\{M(x\,;y)\,;x \in I \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}.$$

Cette fonction est la densité de la loi normale d'espérance m et d'écart-type σ.

Remarque : La probabilité de l'événement « $a \leq X \leq b$ » est : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Exemple : On a représenté une loi normale de moyenne $m = 5{,}3$ et d'écart-type $s = 2{,}51$.
La probabilité est l'aire sous la courbe dessinée en bleu ci-contre.



Propriété : Si une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ de fonction de densité f alors :
la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = m$ et l'aire entre cette courbe et l'axe des abscisses est finie égale à 1 ;
pour tout réel b, la limite

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}x$$

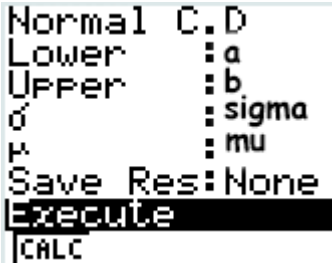
existe et est finie ; cette limite est la probabilité de l'évènement « $X \leq b$ » ;
$P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0{,}5$.

Exemple de représentation graphique de la loi normale. (Fichier géogébra)

Calcul de probabilités d'une loi normale à l'aide de la calculatrice :

Lorsque X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ, $\mathcal{N}(m;\sigma)$,
Pour obtenir la probabilité $P(a \leq X \leq b)$:

- Avec les TI en allant dans le menu DIST, on utilise la 2ème fonction : $normalFRèp(a, b, m, \sigma)$.
- Avec les Casio dans le menu Stat puis DIST et NORM et enfin Cdp,



Le problème qui se pose pour le calcul des probabilités des événements du type « $X \leq b$ » est que la calculatrice ne donne que la probabilité des évènements de la forme « $a \leq X \leq b$ ».

Première méthode : Pour se faire, on utilise le fait que $P(X \leq m) = P(X \geq m) = 0{,}5$.
Donc pour calculer $P(X \leq b)$ il faut faire deux cas :

- Si $b > m$ on calculera $P(X \leq b) = P(X \leq m) + P(m \leq X \leq b) = 0{,}5 + P(m \leq X \leq b)$.
- Si $b < m$ on calculera $P(X \leq b) = P(X \leq m) - P(b \leq X \leq m) = 0{,}5 - P(b \leq X \leq m)$.

Autre méthode : sans faire de découpage à l'aide la moyenne, il suffit de rentrer dans la calculatrice :

$$P(X \leq b) \simeq P(-10^{99} \leq X \leq b) \quad \text{ou} \quad P(X \geq b) \simeq P(b \leq X \leq 10^{99}).$$

Donne des approximations suffisamment fines pour résoudre les problèmes posés.

b. Les intervalles à « 1, 2 ou 3 sigma »

Théorème : Si une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance m et d'écart-type σ alors :
$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \simeq 0{,}68$ (arrondis au centième)
$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \simeq 0{,}95$ (arrondis au centième)
$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \simeq 0{,}997$ (arrondis au millième)

c. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

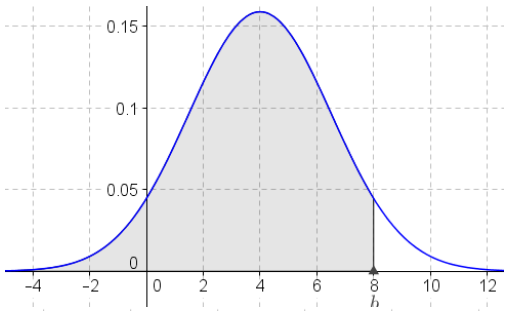
Théorème : Pour n « assez grand » $n \geq 30$ et une probabilité vérifiant : $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$, alors on peut approcher la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale d'espérance $m = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

II. Exercice

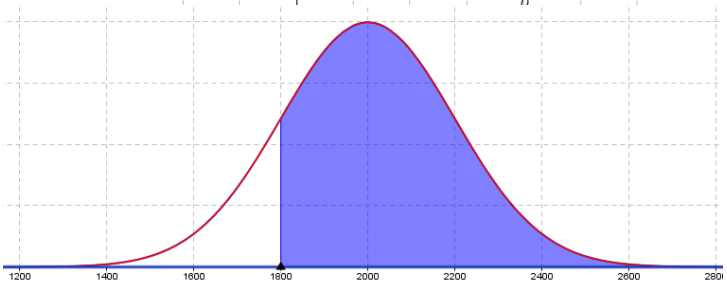
Exercice 1.

Chaque graphique est une représentation d'une loi normale.

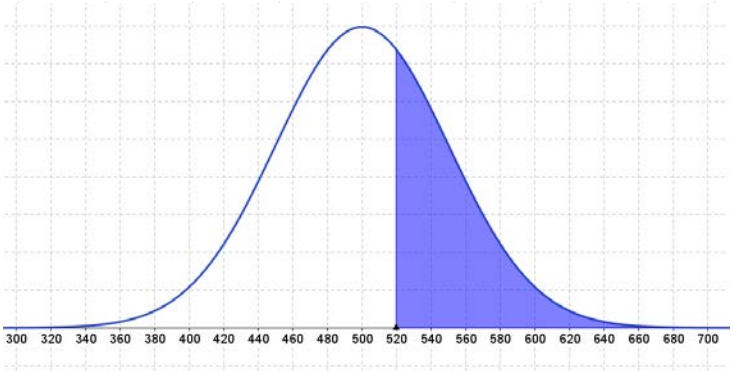
Donner la valeur de l'espérance et la façon de calculer la probabilité demandée :



1) $P(X \leq 8) =$
   a. $0{,}5 - P(4 \leq X \leq 8)$;
   b. $0{,}5 + P(4 \leq X \leq 8)$;
   c. $1 - P(4 \leq X \leq 8)$.



2) $P(X \geq 1800) =$
   a. $0{,}5 + P(1800 \leq X \leq 2000)$;
   b. $1 - P(1400 \leq X \leq 1800)$;
   c. $0{,}5 - P(1800 \leq X \leq 2000)$.



3)
   $P(X \geq 520) =$
   a. $0{,}5 + P(500 \leq X \leq 520)$
   b. $0{,}5 - P(480 \leq X \leq 500)$
   c. $1 - P(380 \leq X \leq 520)$

31 Un constructeur automobile a créé un nouveau moteur diesel pour équiper ses petits modèles. La durée de vie de ce moteur, exprimée en nombre de kilomètres, est une variable aléatoire X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(200\,000\,;30\,000)$.

1. Quelle est la probabilité que la durée de vie du moteur soit supérieure à 250 000 kilomètres ?

2. Les véhicules équipés de ce moteur sont garantis 120 000 kilomètres. Quelle est la probabilité que la garantie soit utilisée pour un problème de moteur cassé ?

3. Le constructeur a vendu en tout 145 000 véhicules. Estimer le nombre de fois où le constructeur va faire fonctionner la garantie pour un problème de moteur cassé.

32 Lors d'une réaction entre deux composés chimiques A et B et dans des conditions identiques, la quantité de chaleur dégagée, exprimé en Joules, est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(1000\,;200)$.

1. Quelle est la probabilité que la quantité de chaleur dégagée soit inférieure à 100 ?

2. Quelle est la probabilité que la quantité de chaleur dégagée soit supérieure à 1 500 ?

Exercice 2.

Une entreprise fabrique des condensateurs de capacité affichée égale à $210\ \mu\text{F}$.
On note X la variable aléatoire qui associe, à un condensateur choisi au hassard dans la production, sa capacité réelle en μF. On admet que X suit une loi normale d'espérance 210 et d'écart-type 12. On prélève au hasard un condensateur dans la production.
Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que sa capacité réelle soit :

a) Comprise entre 189 et $252\ \mu\text{F}$;
b) Inférieure ou égale à $200\ \mu\text{F}$;
c) Supérieure ou égale à $215\ \mu\text{F}$.
une capacité inférieur à 12.

Exercice 3.

Une usine fabrique en grande série des disques de diamètre théorique $238\ \text{mm}$. On note X la variable aléatoire qui, à tout disque produit, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale d'espérance 238 et d'écart-type $0{,}4$. On tire au hasard un disque dans la production.
Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que son diamètre réel soit :

a) Supérieur ou égal à $237{,}5\ \text{mm}$;
b) Inférieur ou égal à $237{,}8\ \text{mm}$;
c) Compris entre $237{,}18$ et $238{,}82\ \text{mm}$

Exercice 4.

Une entreprise fabrique des plaques de forme carrée en grande quantité. On note L la variable aléatoire qui, à chaque plaque de ce type prélevée au hasard dans le stock, associe la longueur de son côté. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 550 et d'écart-type 1.

a) Calculer la probabilité qu'une plaque ait un côté de longueur inférieur à 549,6 mm.
b) Calculer la probabilité qu'une plaque ait un côté de longueur supérieur à 550,8 mm.
c) Une plaque est conforme si la longueur de son côté, que l'on exprime en millimètre, appartient à l'intervalle $[548\,;552]$. Calculer la probabilité qu'une plaque soit conforme.
.