I. Définition et propriété

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$. De plus, $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$. On déduit que $\ln x$ prend toutes ces valeurs dans l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$, lorsque x décrit $]0\,;\,+\infty[$.

x	0	b	$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	a	$+\infty$

Définition : Pour tout nombre réel a, on appelle exponentielle de a, et on note $\exp(a)$, l'unique réel b tel que $\ln b = a$.

Exemple : $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Propriétés : Pour tout réel x, et tout réel y **strictement positif** , on a les propriétés suivantes :

① $\exp(x) > 0$ ② $\ln y = x \Leftrightarrow y = \exp x$ ③ $\ln(\exp(x)) = x$ ④ $\exp(\ln(y)) = y$

Propriété : Pour tous réels x et y

$$\exp(x)\times\exp(y) = \exp(x+y)$$

Au regard de cette propriété, on adoptera la notation puissance avec le nombre irrationnel $e \simeq 2.71828$ ....

Notation : Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = e^x$.

Propriétés : Pour tout nombre réel a, et pour tout nombre réel y **strictement positif**

①$e^a > 0$ ②$\ln b = a \Leftrightarrow b = e^a$ ③$\ln(e^a) = a$ ④$e^{\ln b} = b$

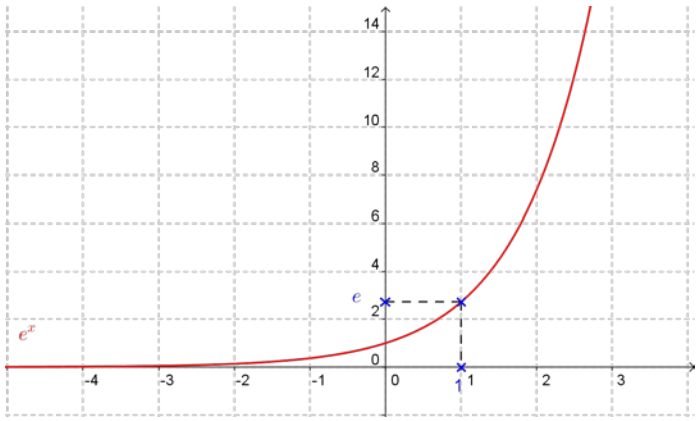
Pour tous réels x et y, et tout entier naturel n,

①$e^{x+y} = e^x e^y$ ② $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ ③$\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ ④$(e^x)^n = e^{nx}$.

II. Variation et limite

Propriété : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x) = e^x\,.$$



Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante et donc pour tous nombres réels x et y :

$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y.$$

Propriétés : Pour tout réel x, et tout réel y **strictement positif** , on a les propriétés suivantes :

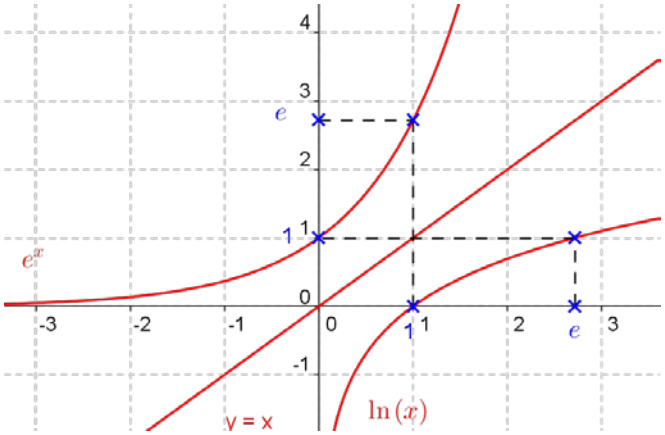
$$\ln y < x \Leftrightarrow y < \exp x$$

Propriété :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \; et \; \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

On résume ces informations dans un tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$



Propriété : Dans un repère orthonormée, la courbe représentative la fonction exponentielle est symétrique à celle de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite d'équation $y = 0$.

III. Variation d'une fonction $e^{u(x)}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et admet pour fonction dérivée :

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, de façon réciproque une primitive d'une fonction f sur I définie par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction F définie sur I par :

$$F(x) = e^{u(x)}.$$

Propriété : Soit u une fonction définie sur un intervalle I. On appelle a soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to a} u(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x\to a} e^{u(x)} = +\infty.$$

IV. Exponentielle de base a.

Définition : Pour tout nombre réel strictement positif a, on appelle exponentielle de base a, la fonction :

$$a^x = e^{x\times\ln a}.$$

V. Croissance comparé.

Propriété : Pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$