I. Définition

Définition : On appelle fonction logarithme népérien, l'unique fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, ayant pour fonction dérivée la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$
et vérifiant, pour tous réel a et b strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$.
La fonction logarithme népérien est notée $\ln$.

II. Propriétés algébriques

a. Produit

Propriété : Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Exemples : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$ $\qquad$ $\ln 2 + \ln 5 = \ln(2 \times 5) = \ln 10$

b. Inverse et quotient

Propriété : Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

c. Puissance et racine carrée

Propriété : Pour tout réel a strictement positif et tout entier relatif n,

$$\ln(a^n) = n \ln a \qquad \text{et} \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a.$$

III. Etude de la fonction logarithme népérien

a. Ensemble de définition

Conséquence de la définition, la fonction $\ln$ est définie sur $]0\,;\,+\infty[$.

b. Fonction dérivée et sens de variation

Propriété : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
Sa fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété : Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

c. Limites

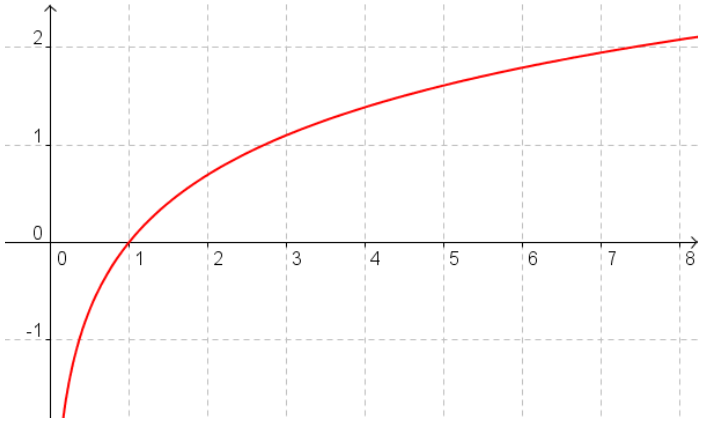
Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty.$$

d. Tableau de variation et courbe représentative

Dans le tableau de variation, on note f la fonction $\ln$ et f' sa dérivée.

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\|$	$+$
$f(x)$	$\|$	$-\infty \nearrow +\infty$



e. Le nombre e.

Propriété : Il existe un unique réel, noté e tel que $\ln e = 1$

f. Egalité et inégalités

Propriété : Pour tout $x \in]0 ; 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1 ; +\infty[$, $\ln x > 0$.

Propriété : Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$.
Pour tous réels a et b de $]0 ; +\infty[$, $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$.

IV. Application de fonction ln.

a. Dérivée

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de I, $u(x) > 0$.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$ est alors dérivable sur I et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

b. Limites

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de I, $u(x) > 0$.
On désigne par a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \ln\big(u(x)\big) = -\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \ln\big(u(x)\big) = +\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ avec b réel strictement positif, alors $\lim\limits_{x\to a} \ln\big(u(x)\big) = \ln b$

V. Primitives

a. Primitives de la fonction inverse

Propriété : Les primitives sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln x + c$, où c est une canstante réelle.

b. Primitives de la forme $\frac{u'}{u}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de I, $u(x) > 0$.
Les primitives de la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \ln\big(u(x)\big) + c$, où c est une constante réelle.

Exemple : On chercher les primitives de la fonction f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$.
On remarque que $f(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $u(x) = x^2 + 3$.
De plus pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $x^2 + 3 > 0$ donc, d'après la propriété précédente, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F de la forme $F(x) = \ln(x^2 + 3) + c$, où c est une constante réelle.

VI. Croissance comparée

Propriété : Pour tout entier naturel n non nul :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$