I. Limites d'une fonction à l'infini

a. Limites infinies

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - x + 1$, et dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est donnée ci-contre.

1. Calculer $f(10^2), f(10^6), f(10^8)$ et $f(10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de …, dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$). »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ avec a un réel.
On dit que la limites de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$, et l'on écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut (voisin de $+\infty$), dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$).

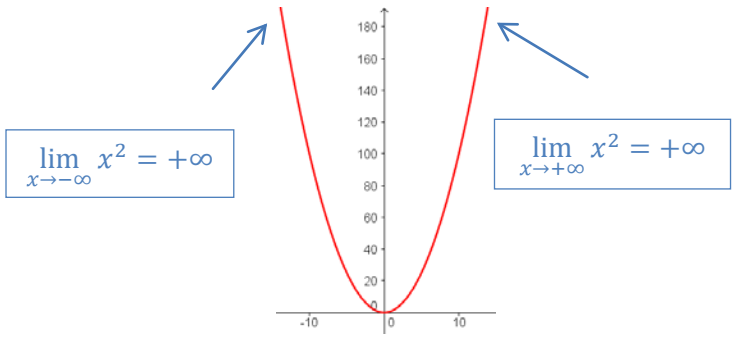
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ avec a un réel.
On dit que la limites de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$, et l'on écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

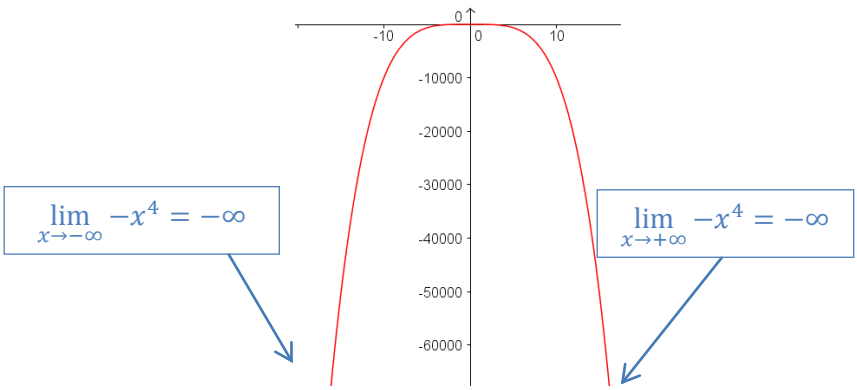
lorsque $f(x)$ est aussi petit que l'on veut (voisin de $-\infty$), dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$).

Exemples :

Limites de la fonction carrée en $-\infty$ et en $+\infty$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.



Soit f la fonction définiesur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4$.



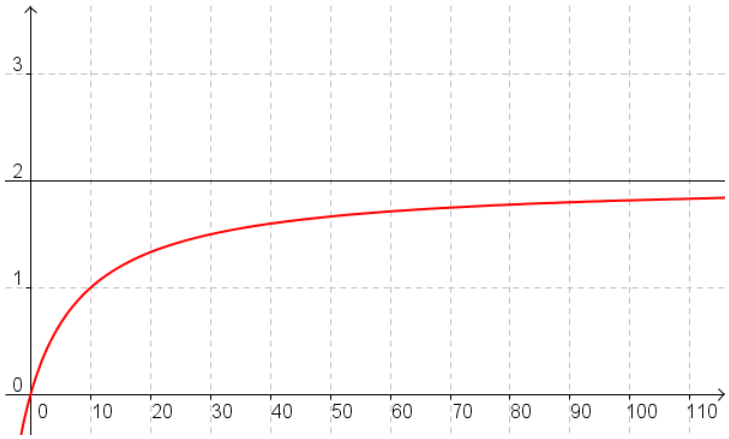
b. Limites finies

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+10},$$

et dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est donnée ci-contre.



1. Calculer $f(10^2), f(10^6), f(10^8)$ et $f(10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de …, dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$). »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et ℓ un nombre réel.

1) Si $I =]a\,;\,+\infty[$, et si, la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi proche de zéro que l'on veut, dès que x est assez grand (voisin de $+\infty$) alors on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à ℓ et l'on note :

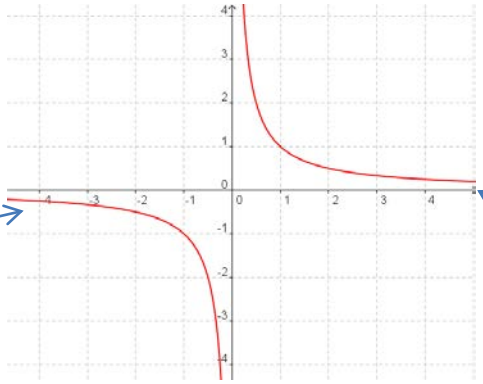
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

2) Si $I =]-\infty\,;a[$, et si, la distance entre $f(x)$ et ℓ est aussi proche de zéro que l'on veut, dès que x est assez petit (voisin de $-\infty$) alors on que la limite de f en $-\infty$ est égale à ℓ et l'on note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell.$$

Exemple :
Limite en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction inverse :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$



$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

c. Limite finie et Asymptotes horizontales

Définition *(interprétation graphique)* : Soient une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a\,;\,+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;a]$) avec a un réel et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Lorsque la fonction f admet pour limite en $+\infty$ (r. en $-\infty$) un réel k ; c'est-à-dire:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k, \left(\text{r. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = k\right)$$

On dit que la droite d'équation $y = k$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ (r. $-\infty$).

Exemple : La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et $-\infty$. Et la droite $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f de l'activité 2 en $-\infty$.

II. Limite d'une fonction en a

a. Limites infinies

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1},$$

et dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est donnée ci-contre.

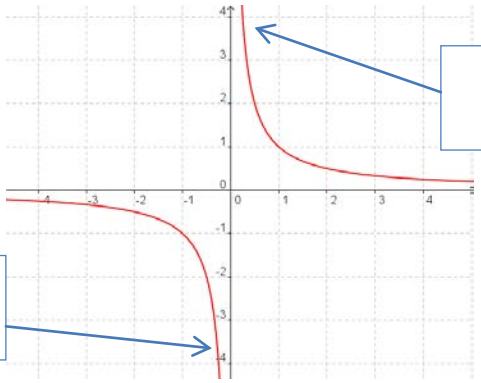
1. Calculer $f(1{,}1), f(1{,}001), f(1+10^{-6})$ et $f(1+10^{10})$.
2. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de …, dès que x approche 1 par la droite. »
3. Calculer $f(0{,}9), f(0{,}999), f(1-10^{-6})$ et $f(1-10^{10})$.
4. En observant la représentation graphique, et les résultats de la première question, compléter la phrase : « $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de …, dès que x approche 1 par la gauche. »

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$ (ou $[-\infty\,;a[$) avec a un réel.
On dit que la limites de f en a est égale à $\pm\ \infty$, et l'on écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty,$$

lorsque $f(x)$ est aussi grand ou petit que l'on veut (voisin de $\pm\infty$), dès que x est suffisamment près de a (voisin de a).

Exemple : Limites de le fonction inverse en 0 :
Remarque :
On distingueras la limite à droite de 0 c'est-à-dire lorsque $x > 0$ (noté 0^+)
avec la limite à gauche de 0 : $x < 0$ (noté 0^-).



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

b. Limites infinies et asymptotes verticales

Définition *(interprétation graphique)*: Soient f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,+\infty[$ (ou $[-\infty\,;a[$) avec a un réel et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
Lorsque la limites de f en a est égale à $\pm\ \infty$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

Exemple : La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse en $+\infty$ et $-\infty$.

Et la droite $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f de l'activité 3 en $-\infty$.

c. Limites en un point du domaine de définition

Théorème : Soit f une fonction polynôme, rationnelle, sinus, cosinus ou racine carrée définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I. On a alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Remarque : Ce théorème nous permet de dire qu'en tout point de l'intervalle I la fonction f est continue.

III. Calcul de limites

a. Limites de références

i. Fonction $x \mapsto x^n$, avec n entier naturel

Théorème : Pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty.$$

Si n est pair :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty.$$

Si n est impair :

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$

ii. Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

Théorème :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

iii. Limite de la fonction inverse

Théorème :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

b. Opérations sur les limites

i. Produit d'une fonction par une constante

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k un réel non nul.

- Si $f(x)$ tend vers a, alors $k \times f(x)$ tend vers ka.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $+\infty$ si k est positif et $-\infty$ si k est négatif.
- Si $f(x)$ tend ves $-\infty$, alors $k \times f(x)$ tend vers $-\infty$ si k est positif et $-\infty$ si k est négatif.

Ces résultats sont valables, pour un limite quand x tend vers x_0 appartenant à l'intervalle I, ou une borne de I, ou quand x tend vers $\pm\infty$.

ii. Somme de deux fonctions

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$ vers b alors $f(x)+g(x)$ tend vers $a+b$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers $-\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $-\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$tend vers $-\infty$, alors $f(x)+g(x)$ tend vers $-\infty$.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x)+g(x)$ c'est une forme indéterminée.

iii. Produit de deux fonctions

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un inervalle I de $\mathbb{R}$, et a et b deux réels.

- Si $f(x)$ tend vers a et $g(x)$tend vers b, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers ab.
- Si $f(x)$ tend vers a (avec $a\neq 0$) et $g(x)$tend vers $+\infty$, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon le signe de a.
- Si $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ et $g(x)$tend vers$\pm\infty$, alors $f(x)\times g(x)$ tend vers $\pm\infty$ selon la règle du produit.

Remarque : Si $f(x)$ tend vers 0 et $g(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite de $f(x)\times g(x)$ c'est une forme indéterminée.

iv. Puissance d'une fonction

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et a un réel.

- Si $u(x)$ tend vers a, alors $u^n(x)$ tend vers a^n.
- Si $u(x)$ tend vers $+\infty$, alros $u^n(x)$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers $-\infty$ et n est pair, alors $u^n(x)$ tend vers $+\infty$
- Si $u(x)$ tend vers $-\infty$ et n est impair, alors $u^n(x)$ tend vers $-\infty$

v. Inverse d'une fonction

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que u ne s'annule pas sur I.

- Si $u(x)$ tend vers $\pm\infty$, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers 0.
- Si $u(x)$ tend vers un réel a non nul, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $\frac{1}{a}$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et est strictement positif sur I, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $+\infty$.
- Si $u(x)$ tend vers 0 et strictement négatif sur I, alors $\frac{1}{u(x)}$ tend vers $-\infty$

Exemple : Limite en 0 de la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{x}}$:

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est définie est positive sur $[0\,;\,+\infty[$, sa limite en 0 est 0.

On déduit du théorème précédent : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

vi. Limites des fonctions $x\mapsto\frac{1}{x^n}$, avec n entier naturel

Théorème :

Limites en $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

Limites en 0 :

- Si n est pair :

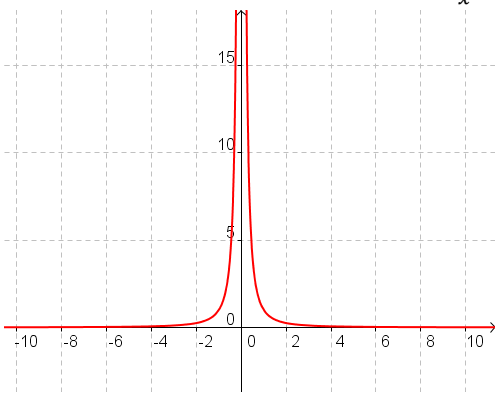
$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

- Si n est impair :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe en 0.

Exemples : Représentation des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$:



vii. Quotient de deux fonctions

Théorème : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que g ne s'annule pas sur I.

- Si $f(x)$ tend vers un réel a et $g(x)$ vers un réel b non nul, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\frac{a}{b}$.
- Si $f(x)$ tend vers un réel a et $g(x)$ vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0.
- Si $f(x)$ tend vers un réel a non nul est $g(x)$ tend vers 0, alors $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
  Selon le signe de a et de $g(x)$

Exemple : Soit la fonction u définie sur $I =]-\infty\,;3[$ par $u(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

On cherche la limite de $u(x)$ quand x tend vers 3. On a :

$$\lim_{x\to3}(x+1) = 4 \text{ et } \lim_{x\to3}(x-3) = 0.$$

Donc la fonction $x \mapsto x+1$ tend vers 4 qui est strictement positif et la fonction $x \mapsto x-3$ est négative sur I, donc d'après le théorème précédents :

$$\lim_{x\to3} u(x) = -\infty.$$

Donc la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe représentative de u.