I. Dérivées

Théorème Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.
La fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \left(u(x)\right)^n$$

est dérivable sur I et, pour tout x de I, on :

$$f'(x) = n \times u'(x) \times \left(u(x)\right)^{n-1}.$$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$.

$$f'(x) = 3 \times (\cos x) \times \sin^2 x.$$

II. Primitives d'une fonction

1. Ensemble de primitives d'une fonction sur un intervalle

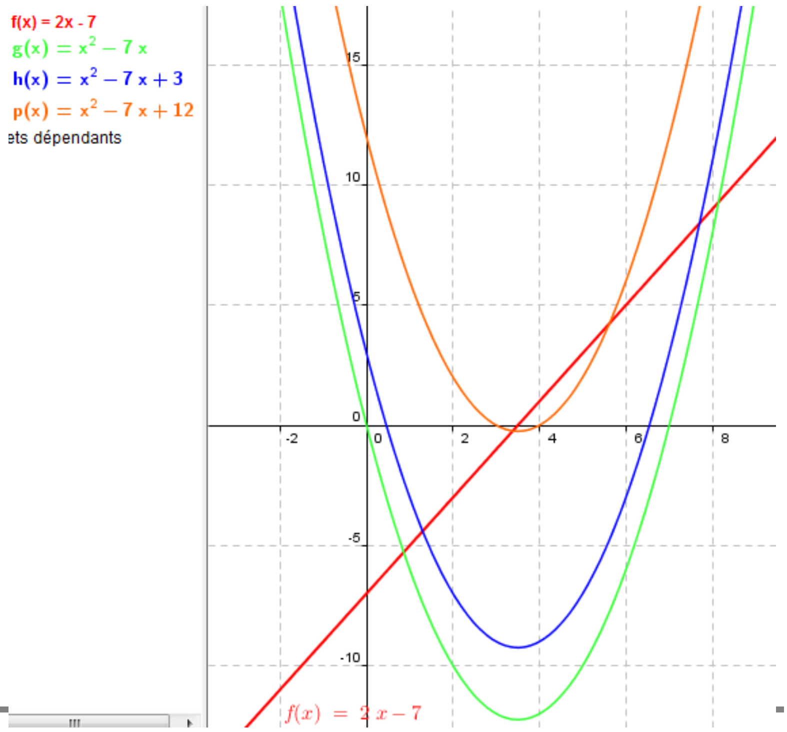
Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F dont la fonction dérivée est f.

Remarque : « f est la dérivée de F sur I » à le même sens que « F est une primitive de f sur I ».

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$.
La fonction f est la fonction dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$,
mais f est aussi la fonction dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^2 + 3$.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors :
* toute fonction de la forme $F + c$, où c est une constante réelle, est une primitive de f ;
* toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + c$, où c est une constante réelle.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 7$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 - 7x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Il s'en suit que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $\mapsto x^2 - 7x + c$, où c est une constante réelle.
Sur une représentation graphique on peut tracer plusieurs primitives d'une même fonction.



2. Primitives des fonctions de références

Par lecture « inverse » du tableau de dérivée on obtient le tableau de primitive suivant :

f est une fonction définie sur l'intervalle I et F est une primitive de f sur I. Soit n entier tel que $n \leq -2$ ou $n \geq 1$

f	k	x	$\frac{1}{x^2}$	x^n	$\cos x$	$\sin x$	$\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$
F	kx	$\frac{x^2}{2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
Intervalle I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ si $n \leq -2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les primitives

- Produit par une constante

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle. Si U est une primitive de u sur I, alors :

$$kU \text{ est une primitive sur } I \text{ de } ku.$$

- Somme de deux fonctions

Théorème : Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si U est une primitives de I de u et V une primitive sur I de v, alors :

$$U + V \text{ est une primitive sur } I \text{ de } u + v.$$

- Conséquence de la formule de dérivation de u^n.

Théorème : Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul.
La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x) \times \left(u(x)\right)^n$ admet pour primitives sur I les fonctions de la forme $F(x) = \frac{1}{n+1}\left(u(x)\right)^{n+1} + c$, où c est une constante réelle.